

LA MECÁNICA ESTADÍSTICA: SUS ORÍGENES Y SUS PARADOJAS A LA LUZ DE LOS ESCRITOS DE PAUL Y TATIANA EHRENFEST

RICARDO GUZMÁN, JOSÉ ANTONIO CERVERA
Instituto Tecnológico de Monterrey

RESUMEN

La mecánica estadística, disciplina científica que empezó a desarrollarse a mediados del siglo XIX, presenta dos aspectos que la hacen susceptible de discusiones de carácter filosófico y epistemológico: el uso que hace de la hipótesis atómica y la introducción de nociones probabilísticas. En este artículo hacemos una revisión de sus orígenes y sus problemáticas basándonos en los escritos de Paul y Tatiana Ehrenfest. En la exposición que ofrecemos, nos detenemos en tres momentos claves: la visión que Paul Ehrenfest tenía de su maestro Boltzmann, expuesta en un obituario escrito en 1906, dos artículos escritos por Paul y Tatiana en 1906 y 1907 donde abordan de una manera penetrante algunas de las incongruencias que presentaba en ese momento la mecánica estadística, y finalmente, un artículo escrito por encargo y que apareció en 1911, en el que presentan el desarrollo de la disciplina, el estado que presentaba en ese momento y las preguntas que faltaba por responder en torno a ella. En esos trabajos, Paul y Tatiana abordan esta materia desde una perspectiva crítica, indicando

ABSTRACT

Statistical mechanics, scientific discipline that started developing in the middle of the nineteenth century, presents two features that make it susceptible of discussions of philosophical and epistemological character: the use that it makes of the atomic hypothesis and the introduction of probabilistic notions. In this article we make a review of its origins and problematic by examining the writings of Paul and Tatiana Ehrenfest. In the presentation that we offer, we stop at three key moments: the vision that Paul Ehrenfest had of his teacher Boltzmann, shown in an obituary written in 1906, two articles written by Paul and Tatiana in 1906 and 1907 where they deal, in a penetrating way, with some of the inconsistencies that were present in the statistical mechanics at that moment, and finally, an article written by request and that appeared in 1911, in which they present the development of the discipline, his status at that moment and the questions that were not yet answered with respect to it. In those works, Paul and Tatiana approached the subject

paradojas y clarificando conceptos, dejando así una huella importante para posteriores investigadores de esa disciplina. *from a critical point of view, pointing at its paradoxes and clarifying concepts, leaving a track to be followed by other researchers of the discipline.*

Palabras clave: Mecánica estadística, atomismo, probabilidad, Ehrenfest, Boltzmann, Maxwell.

Key words: Statistical Mechanics, Atomism, Probability, Ehrenfest, Boltzmann, Maxwell.

1. Introducción

Un libro de texto estándar de mecánica estadística¹ define a esta disciplina como la ciencia de predecir propiedades observables de un sistema formado por muchos cuerpos, estudiando las estadísticas del comportamiento de sus constituyentes individuales, ya sean estos átomos, moléculas, fotones, etc². Esto significa que de manera natural, la mecánica estadística aparece como eslabón entre las ciencias que se ocupan del mundo macroscópico y que lo tratan como continuo —como es el caso de la termodinámica— y las ciencias que se ocupan del mundo microscópico y reconocen a la naturaleza como compuesta de partículas discretas. El desarrollo de esta disciplina constituyó un gran triunfo de científicos del siglo XIX como Rudolf Clausius (1822-1888), James Clerk Maxwell (1831-1879) y de manera muy especial Ludwig Boltzmann (1844-1906).

Como disciplina científica, la mecánica estadística presenta situaciones problemáticas desde el punto de vista filosófico y epistemológico, ya que sus «verdades» dependen de nociones probabilísticas y la función que éstas juegan en su tarea explicativa de los fenómenos. Boltzmann, uno de los fundadores de la mecánica estadística, y de quien Paul Ehrenfest (1880-1933) fue discípulo, tenía una especial preocupación por las cuestiones filosóficas en torno a los temas que él manejaba. En una conferencia que ofreció en 1904 titulada *Sobre la mecánica estadística*, dedica más de la mitad de la conferencia a sus divagaciones filosóficas antes de entrar propiamente en el tema de su conferencia, pues él mantenía la «esperanza de que la colaboración entre la filosofía y las ciencias de la naturaleza dé a ambas nuevas perspectivas»³.

Dentro del pensamiento filosófico del siglo XIX, ejerce una gran influencia el positivismo. Una manera concisa de recapitular esta corriente de pensamiento es atendiendo a los siguientes tres criterios: un rechazo a las explicaciones metafisi-

cas, la convicción de que la ciencia constituye la verdadera y única forma de conocimiento, y una interpretación particular de esa verdadera ciencia en el sentido de restringirse al descubrimiento y descripción de correlaciones de la experiencia⁴. Sin embargo, es claro que muchos físicos no siguieron los consejos del positivismo. Por ejemplo, regresando a la conferencia de Boltzmann que se mencionaba en el párrafo anterior, vemos que él se refiere a la mecánica estadística (asociada desde luego a su visión atomística) como una disciplina en la que no se puede negar la existencia de elementos hipotéticos y declara que esa ciencia «es una imagen que trasciende audazmente los puros hechos de observación», pero la defiende diciendo que dichas hipótesis «arrojan nueva luz sobre ciertos aspectos particulares de los hechos observados»⁵.

Después del desarrollo de la mecánica estadística en el siglo XIX y ante la crisis de las ciencias físicas a principios del siglo XX, la presencia de científicos críticos de su propia disciplina resultó muy importante. Uno de estos científicos es Paul Ehrenfest, quien como discípulo de Boltzmann tuvo un gran interés en la mecánica estadística. En este artículo nos proponemos hacer una revisión del estado que guardaba esa disciplina desde la perspectiva de la crítica de Paul Ehrenfest y su esposa Tatiana Alexeyevna Afanasyeva (1876-1964) y de su propio trabajo en torno a dicha ciencia en los primeros años del siglo XX, atendiendo de manera especial a las paradojas y controversias que generó.

2. Bosquejo histórico de la mecánica estadística

Existe una amplia literatura sobre la historia de la mecánica estadística, de manera que no es éste el lugar para hacer una extensa revisión sobre el tema, pero sí queremos, de manera muy esquemática, mencionar algunos momentos decisivos de dicha historia, destacando las ideas de las cuales se ocuparían Paul Ehrenfest y su esposa, en los primeros años del siglo XX. A Paul Ehrenfest le tocó vivir, como físico teórico, momentos decisivos en el desarrollo de su disciplina, en los cuales se vivieron tiempos de crisis que finalmente llevaron a un radical proceso de transición en la comprensión del mundo físico. Ehrenfest fue muy respetado por su comunidad científica, pero él particularmente sufría de baja autoestima en relación con su trabajo, en el sentido de sentirse incapaz de desarrollar de manera profunda una línea de pensamiento. Este sentimiento acompañó a Ehrenfest incluso ya en una etapa muy madura como físico teórico y en repetidas ocasiones lo expresaba con sus amigos. Por ejemplo, en cartas dirigidas a Einstein (1879-1955) con motivo de una visita de éste a la Universidad de Leiden (donde trabajaba Ehrenfest), manifestaba su inseguridad diciendo: «estoy muy, muy depri-

mido – en parte debido a las eternas preocupaciones (¡¡¡menores!!!) de dinero, en parte porque no estoy haciendo nada de trabajo. Lo que puedo hacer, no es ciencia, sino sólo un poco de conversación de entretenimiento de salón o de pasillo acerca de la física – la física hecha por otros⁶ y en su relación con quienes él consideraba «grandes», decía sentirse como «una inocua e indefensa rana temerosa de ser aplastada»⁷. Pero eso sí, se sentía sumamente atraído por las paradojas que presentaba en esa época el desarrollo de la física teórica, y lo apasionaba ocuparse de ellas, contribuyendo a promover un espíritu crítico y reflexivo en su disciplina. Por eso, nuestra breve revisión histórica, así como los planteamientos de carácter filosófico de la siguiente sección se centran principalmente en esos elementos que para Ehrenfest resultaban más fundamentales y de mayor interés.

Decíamos en la introducción que la mecánica estadística aparece como una herramienta teórica que conectaría el mundo macroscópico con el microscópico. El antecedente histórico es por supuesto la ciencia del calor, la termodinámica. Suele citarse la obra de Sadi Carnot (1796-1832)⁸ de 1824 como el punto de partida de la termodinámica como ciencia moderna⁹. Pero esta obra se basa en la teoría del calórico y en ella, aunque se presentan ideas relacionadas con lo que después se llamaría la *segunda ley de la termodinámica*, éstas son aún incompletas¹⁰. Una presentación más sistemática de dicha ciencia fue dada por Clausius, en quien ya encontramos una convicción plena de que el calor no es una sustancia, sino una forma de movimiento. Para 1859, se identifica sin duda, en los trabajos de Clausius, una aceptación de la equivalencia entre el calor y el trabajo y una expresión de la segunda ley de la termodinámica de una manera formal y completa, introduciendo el concepto de *entropía*. Pero más importante para nuestro tema es que encontramos en Clausius las primeras expresiones modernas de la teoría cinética de los gases, es decir, la idea de que las características macroscópicas de un sistema, se pueden explicar en términos de sus constituyentes microscópicos (átomos o moléculas que en un principio eran totalmente hipotéticos y poco a poco fueron adquiriendo el status de entidades *reales*) y las leyes dinámicas fundamentales que los gobiernan. Evidentemente, la lucha por desarrollar y difundir estas nuevas formas explicativas se vería fuertemente atacada por pensadores como Ernst Mach (1838-1916), que defendían una visión fenomenológica de los fenómenos físicos apoyados por las ideas positivistas que habían surgido a lo largo del siglo XIX.

Quienes más tuvieron que luchar contra estas corrientes positivistas que condenaban el uso de hipótesis y de entidades que no tuvieran un correlato sensorial directo fueron Maxwell y Boltzmann, a quienes se les reconoce haber puesto las bases de la mecánica estadística. Maxwell introdujo la idea de la distribución estadística de velocidades. Partiendo de unos sencillos postulados, Maxwell

logra obtener una expresión para la distribución de las velocidades de las moléculas de un gas cuando está en equilibrio, la cual resulta ser igual a la distribución normal de errores en un proceso de medición, es decir, la conocida función exponencial en forma de campana¹¹. Atraído por estas ideas, Boltzmann se propone derivar la segunda ley de la termodinámica usando las leyes de la mecánica a partir del enfoque estadístico de Maxwell. Boltzmann derivó una ecuación integro-diferencial que describe el proceso por medio del cual un gas tiende hacia su condición de equilibrio y mostró cómo ese estado final está caracterizado por la citada ley de distribución de velocidades de Maxwell. La demostración está basada en el efecto que producirían las colisiones entre moléculas, usando su hipótesis del caos molecular (*Stoßzahlansatz*)¹². Y aquí se encuentra la semilla de los problemas y de las disputas que tuvo que enfrentar Boltzmann, pues la pretensión de estar obteniendo resultados basados en principios mecánicos y los procesos irreversibles a los que se llega (el sistema siempre se mueve hacia el estado de equilibrio) conduce a una serie de paradojas que introduciremos en la siguiente sección y que despertaron el interés de los Ehrenfest, asunto que discuten en varios artículos que analizaremos más adelante. Para combatir a sus críticos, Boltzmann desarrolla aún más sus ideas estadísticas, tratando de que sus conclusiones sean independientes del análisis de colisiones, dándole a su trabajo un carácter totalmente probabilístico. Estos esfuerzos lo conducirían a expresiones equivalentes a la famosa fórmula para la entropía $S = k \log W$.

Este enfoque de Boltzmann requiere una explicación más puntual. La nueva noción utilizada por Boltzmann consiste en definir un *microestado* como cada una de las formas posibles en que se puede distribuir una energía total dada del sistema entre sus moléculas, y un *macroestado* como una condición macroscópica (que se puede medir) del sistema termodinámico. A cada macroestado le corresponden varios microestados. Se asume que cada microestado es igualmente probable. En la fórmula mencionada en el párrafo anterior, W es igual al número de microestados que corresponden a ese macroestado, de manera que esa fórmula expresa una relación directa entre entropía y probabilidad del estado termodinámico. Por lo tanto, ésta es una definición totalmente probabilística de la entropía con la cual Boltzmann se defiende de sus oponentes bajo la idea de que la segunda ley de la termodinámica del aumento de la entropía es cierta en un sentido estadístico, no absoluto, es decir, todo sistema se dirige, casi siempre, hacia un estado de equilibrio simplemente porque ése es el estado más probable, al que corresponden mayor número de microestados.

Sin embargo, este enfoque se basa en la suposición mencionada arriba de que todos los microestados son igualmente probables. El siguiente paso será tratar de justificar esto último por medios mecánicos. Se trata de la *hipótesis ergódica*, que

pretende justificar esa equiprobabilidad bajo el supuesto de que el sistema considerado pasa el mismo tiempo en cada uno de los estados accesibles (los compatibles con la energía total), y que como veremos en la sección 6 presenta varios problemas y de la cual se ocupó ampliamente el matrimonio Ehrenfest.

3. Filosofía de la mecánica estadística

El título de esta sección no obedece a una intención de hablar de la filosofía de la mecánica estadística en un sentido actual, sino de hacer alusión a una especial actitud de los científicos que estuvieron involucrados en el nacimiento de la mecánica estadística. Nos referíamos en la introducción de este escrito a la inclinación que tenía Boltzmann por la filosofía. ¿Qué relación guarda la actividad científica con el pensamiento filosófico? ¿Necesitan los científicos una orientación filosófica? Gerald Holton aborda éstas y otras preguntas en un provocativo ensayo¹³, en el que pone en evidencia cómo la actividad científica de nuestro tiempo no tiene ese influjo iluminador de los debates epistemológicos del pasado. Aunque Holton se refiere principalmente a los grandes debates filosóficos de la primera mitad del siglo XX entre científicos como Niels Bohr (1885-1962) y Einstein¹⁴, es claro que ellos fueron herederos de los grandes filósofos-científicos de la última mitad del siglo XIX, hombres como el mismo Boltzmann, Mach, Friedrich Wilhelm Ostwald (1853-1932), etc. El mismo Einstein, de quien podemos recordar su observación de que «La epistemología sin contacto con la ciencia se convierte en un esquema vacío. La ciencia sin epistemología es —si es que se puede pensar en tal cosa— primitiva y desordenada»¹⁵, fue fuertemente influenciado por Ernst Mach. En esa lucha entre posiciones fenomenológicas o positivistas por un lado y mecanicistas, materialistas y realistas por otro, Einstein, en una época ya más madura de su vida, se empezó a distanciar de Mach pensando que el papel fundamental que juega la experiencia en la construcción de teorías físicas, se lleva a cabo a través de una recopilación o síntesis creativa de la totalidad de la experiencia física, y no sólo en la suma de esas experiencias, por lo cual ya para ese entonces Einstein se refería a Mach diciendo: «Yo veo su punto débil en el hecho de que creía poco más o menos que la ciencia consistía en poner orden en el material experimental, es decir, que ignoró el elemento constructivo libre en la elaboración de un concepto. Pensaba de alguna manera que las teorías son el resultado de un *descubrimiento* y no de una *invención*»¹⁶. Para Einstein, esta manera de pensar de Mach tendría que llevarnos a rechazar la idea de una realidad física.

El pensamiento de Mach en principio nos conduciría a descartar la idea de que la materia está compuesta de átomos que no podemos ver, aunque él no rechazaba del todo la utilidad del atomismo como hipótesis, pero nunca como algo

«real», pues opinaba que lo que nos representamos, existe sólo en nuestro entendimiento y su forma varía con el punto de vista de la cultura¹⁷. Pero es esta idea atomista de la materia la que está en la base de la teoría cinética de los gases y de la mecánica estadística, y en todos los grandes científicos que colaboraron en la construcción del edificio de la mecánica estadística se destaca esa síntesis creativa que va más allá de los fenómenos.

La mecánica estadística, sin embargo, no es sólo una reducción de la termodinámica basada en la mecánica newtoniana y la visión atomista de la materia, como resulta claro de las paradojas conceptuales que se fueron presentando en el curso de su desarrollo. En todo caso, la mecánica estadística es una extensión de la termodinámica que adopta criterios probabilísticos de los cuales surgen nuevas connotaciones epistemológicas, nuevas preguntas sobre lo que podemos conocer y cuáles son los fundamentos de ese conocimiento. Los conceptos probabilísticos que se aplican no son sólo en el sentido de utilizar valores promedio de cantidades físicas asociadas a las partículas (velocidad, energía...), que podríamos catalogar también como un concepto mecánico, sino en un sentido más fundamental ligado a ideas de aleatoriedad, posibilidad, etc. De entrada, para establecer una clara diferenciación, es importante entender que cuando hablamos de la física cuántica, las probabilidades aparecen como parte de la indeterminación o al menos la falta de determinismo estricto que caracteriza a esa teoría, pero cuando hablamos de la física clásica, se supone que hablamos de una teoría totalmente determinista cuyas leyes en principio permiten conocer completamente el futuro. Por eso, en este caso, el uso de conceptos probabilísticos resulta más desconcertante¹⁸. En esa extraña mezcla de mecánica y estadística, para deducir propiedades macroscópicas, se empieza con las leyes de Newton, pero en el proceso se tienen que introducir nuevos supuestos (por ejemplo que los átomos o moléculas están distribuidos uniformemente o que tienen la misma probabilidad de moverse en cualquier dirección) que a pesar de ser probabilísticos, se establecen como datos *a priori*. Por lo tanto, no queda claro si la introducción de esos nuevos elementos resulta consistente o justificada bajo la base de la aplicación de la mecánica newtoniana. El debate sobre la existencia de los átomos y sobre la justificación o no de combinar principios deterministas y probabilísticos pone a estas nuevas formas de desarrollo de la física en una situación muy delicada y vulnerable.

Boltzmann mostró, al definir el equivalente mecánico del concepto de entropía, que un gas en un estado inicial arbitrario, llegaría a un estado de equilibrio de máxima entropía, como resultado de las colisiones de sus moléculas. Josef Loschmidt (1821-1895), un colega de Boltzmann, introdujo en 1876 un sencillo pero poderoso argumento que ponía en entredicho el edificio en el que se construía

la mecánica estadística. Si tenemos un sistema que evoluciona hacia su máxima entropía, ¿que pasaría si en un momento dado detenemos el sistema, e invertimos las velocidades de todas las moléculas? En virtud del carácter simétrico en el tiempo de las leyes de la mecánica (si en las ecuaciones se cambia t por $-t$ se obtiene el proceso inverso, o sea que estas leyes no proporcionan un sentido del tiempo), el sistema volvería a su estado original, es decir, evolucionaría hacia una disminución de la entropía, siendo que la termodinámica nos dice que la entropía siempre aumenta. Los Ehrenfest bautizaron a esta contradicción como la *paradoja de la reversibilidad*. Boltzmann no sólo dio varios argumentos para defenderse de este ataque sino que se vio motivado por la paradoja para explorar otros conceptos.

Otra objeción a los trabajos de Boltzmann se basa en un teorema de Henri Poincaré (1854-1912) que establece que para ciertos sistemas dinámicos en los que se conserva la energía, necesariamente, si se los deja evolucionar por tiempo indefinido, regresarán un número indeterminado de veces a estados tan cercanos como se quiera a las condiciones iniciales de las cuales habían partido esos sistemas. Ernst Zermelo (1871-1953), alumno de Poincaré, hizo notar en 1896 que esto resultaba en clara contradicción con la segunda ley de la termodinámica. A esto se le llamó la *paradoja de la recurrencia*, de la cual, como veremos en las siguientes secciones, también se ocuparon los Ehrenfest.

El problema de los fundamentos de la mecánica estadística no está del todo resuelto en nuestros días. Nos dice Guttmann que para ir al fondo del asunto en lo que concierne a la naturaleza de las probabilidades en la mecánica estadística, sobre todo en cuanto a si representan verdades objetivas o meramente opiniones subjetivas, se requiere de un temperamento filosófico¹⁹. Tal vez esta rama de la ciencia contribuya a que no se pierda esa vena más inquisitiva de la actividad científica que extraña Holton en nuestros días.

4. Boltzmann visto por Paul Ehrenfest

Con lo descrito en las dos secciones anteriores, resulta claro que uno de los personajes centrales, cuando de los orígenes de la mecánica estadística se quiere hablar, es Ludwig Boltzmann. Si bien actualmente se mantienen en pugna diferentes aproximaciones en torno a la búsqueda de los fundamentos de la mecánica estadística, todas ellas le deben algo al legado de Boltzmann. Y esto es así porque a lo largo de varias décadas, Boltzmann mantuvo una lucha permanente en la generación de nuevas ideas, conceptos y métodos que ayudaron a dar luz a los diferentes aspectos de la termodinámica y la teoría cinética²⁰. En este sentido, podemos decir que Boltzmann fue un científico creativo cuyo trabajo principal

consistió en interpretar la termodinámica desde puntos de vista mecánicos y eliminar las contradicciones entre los procesos mecánicos reversibles y los procesos termodinámicos irreversibles.

Al morir Boltzmann en 1906, después de varios años de haberse mermado su salud y de caer en una depresión que lo llevó al suicidio, su discípulo Paul Ehrenfest escribió un obituario en el que hace un recuento de los logros de su maestro, resaltando su capacidad para lograr «una imagen maravillosamente unitaria»²¹ basada en un esfuerzo continuado por alcanzar interpretaciones mecánicas coherentes, no sólo en sus trabajos de mecánica estadística sino también en otras áreas, como por ejemplo las concernientes a la teoría electromagnética. Tal parece que Ehrenfest admiraba especialmente en Boltzmann la capacidad para ir generando, como trabajo de toda una vida, una estructura teórica en torno a un problema central²².

Ehrenfest nos pone a Boltzmann en escena en un momento en el que algunas aportaciones de Clausius y Maxwell ya habían andado parte del camino en lo que se refiere a la interpretación cinética del comportamiento de los gases y nos explica las opciones de trabajo de Boltzmann como nuevo investigador en esa área: «De acuerdo a las condiciones que presentaba la teoría en ese tiempo, un nuevo acercamiento sólo habría sido posible tomando parte en el perfeccionamiento de los experimentos o en el mejoramiento de los cálculos (...) de los cuales dependía la teoría cinética (...)». Esto hubiera significado hacer ciencia que podríamos clasificar como del tipo normal, siguiendo el lenguaje de Kuhn, pero Boltzmann buscó nuevos paradigmas y «se acercó de inmediato a la teoría cinética con una pregunta completamente nueva (...) ¿No debería ser la segunda ley también un principio puramente mecánico? (...)» que después lo llevaron a otras, como por ejemplo «¿cuáles son las suposiciones que deben venir junto con los axiomas mecánicos generales para poder probar la interpretación mecánica de la ley de la entropía?». Es decir, Ehrenfest nos manifiesta que Boltzmann se propone buscar nuevos horizontes en la explicación de los fenómenos termodinámicos. Podemos agregar nosotros que, para eso, efectivamente Boltzmann tiene que introducir el uso de nuevos elementos hipotéticos, aunados al atomismo y ligados a su concepción mecanicista de la naturaleza, como una forma de ir haciendo inteligibles los fenómenos, porque en definitiva, para Boltzmann, una teoría científica debe funcionar como una imagen de la realidad y donde las hipótesis juegan un papel ya sea heurístico o metodológico para la construcción de dicha teoría. Para Boltzmann, en una palabra, ninguna aproximación a las ciencias naturales que evite el uso de hipótesis puede tener éxito.

Volviendo con Ehrenfest, nos explica en su obituario que la pregunta sobre si la segunda ley no debiera ser un principio puramente mecánico, Boltzmann la

aborda muy joven (con 22 años) en su primer trabajo titulado *La interpretación mecánica de la segunda ley de la teoría del calor*, sin introducir nociones probabilísticas. Al convencerse de que este enfoque era insuficiente, tiene que hacer una reformulación hacia la segunda pregunta que hace referencia a las suposiciones que deben adherirse a los axiomas mecánicos, llegando a la conclusión de que las leyes de la termodinámica se basan «en las leyes de la mecánica y en las regularidades estadísticas que aparecen en medio de los movimientos aleatorios». Con los logros de Boltzmann en sus primeros años de investigación (1866-1871) se aclara la idea de que «la entropía es una ley probabilística», la cual «se profundizará de manera extraordinaria en los siguientes trabajos de Boltzmann».

Ehrenfest hace referencia a 2 publicaciones muy renombradas y fundamentales en el pensamiento de Boltzmann, correspondientes a los años 1872 y 1877. El trabajo de 1872 es en el que aparece la ecuación de Boltzmann y el teorema H y que pretende resolver el problema de los procesos irreversibles. Este trabajo, nos dice Ehrenfest, «define una función H cuyos argumentos son datos cinéticos (...), en la interpretación cinética de la entropía (...) el valor H provee una medida de la desviación aún existente del equilibrio térmico»²³. Vale la pena agregar que aquí se encuentra un punto de interés histórico. Ehrenfest nos dice que

El cálculo del teorema H muestra muy claramente que: El resultado de que H cambie siempre sólo en una dirección, viene solamente por la condición, que uno establece como frecuencia de las diferentes colisiones, que surge del cálculo de probabilidad. El caso ocasional de un proceso opuesto para H (y por lo tanto de una reducción ocasional de la entropía) aparece correspondientemente sólo como inmensamente improbable, pero no imposible; y entonces el comportamiento de la entropía para los procesos irreversibles también está basado en la probabilidad.

Sin embargo, algunos autores sugieren que en esa publicación Boltzmann presenta el resultado de la disminución de H como consecuencia necesaria de las ecuaciones mecánicas del movimiento²⁴ y no sólo como sumamente probable como lo dice Ehrenfest. Boltzmann habría reconocido la existencia de excepciones sólo a partir de la crítica de Loschmidt varios años después. Para dilucidar la cuestión hay que establecer algunas diferencias²⁵. Ciertamente, Boltzmann se refiere en su artículo a que los problemas de la teoría mecánica del calor son realmente problemas del cálculo de probabilidades, pero aclara que sería un error creer que la teoría del calor tendría entonces que contener incertidumbres. La distinción que hay que hacer es entre una ley estricta o causal, que tiene una implicación del tipo «si..., entonces siempre...» y una ley de probabilidad con una implicación del tipo «si..., entonces en un tanto por ciento de los casos...»²⁶. En el caso del segundo tipo de ley, la relación con la experiencia sería menos segura, ya que el

enunciado probabilístico sólo se reproduce en la observación cuando se cuenta con un número suficientemente grande de datos. Así, la conclusión sería que Boltzmann aceptaría excepciones entre la teoría y la observación pero no en la relación entre premisas y conclusión. Así, la ley del incremento de entropía estaría garantizada sólo en el sentido probabilístico, es decir, por la ley de los grandes números.

En el otro trabajo referido, el de 1877 y titulado *Sobre las relaciones entre la segunda ley fundamental de la teoría mecánica del calor y el cálculo de probabilidades*, nos dice Ehrenfest que se termina de responder «a la pregunta que había planteado Boltzmann al principio de su actividad: La ley de la entropía es un principio mecánico estadístico». En realidad, en este último trabajo hay un giro explícito en los planteamientos de Boltzmann en el sentido de aplicar el concepto de probabilidad ya no sólo a manera de una función de distribución que asigna probabilidades a las velocidades moleculares, sino en el sentido de asignar probabilidades al estado de un gas como un todo. Un sistema termodinámico evolucionaría siempre hacia estados de mayor probabilidad, siendo el estado de equilibrio, aquél que posee la máxima probabilidad. La entropía es, de hecho, una medida de la probabilidad del estado macroscópico particular que posea el gas.

Ehrenfest se refiere ya hacia el final de su obituario, y de manera mas concisa, a los trabajos de Boltzmann en otras áreas (teoría electromagnética principalmente), y nos recuerda su interés por usar siempre «imágenes mecánicas» que «son el material con el que preferentemente Boltzmann le da forma a sus creaciones», y sobre todo nos enfatiza el uso que Boltzmann hace de los ejemplos simples, para los cuales,

(...) encuentra un tratamiento exhaustivo y apasionado. Estos caminos hacen que los desarrollos de Boltzmann resulten, de manera poco común, muy vivos: La manera de desarrollar los ejemplos que, con sencillez extrema, siempre exhiben ya todas las formas características de los grandes problemas, nos da una visión de todo el laborioso trabajo que esta inmensa imaginación había realizado antes de penetrar en los resultados de mayor alcance.

Seguramente Ehrenfest se refiere con emoción a esta característica de Boltzmann, dado su propio talento en el uso de modelos conceptuales simples para penetrar en las ideas fundamentales de una teoría, como tendremos oportunidad de comentarlo en la siguiente sección de este artículo al analizar algunos de sus trabajos. Como dijera Einstein al referirse a Ehrenfest: «su inusual y bien desarrollada capacidad para entender la esencia de una noción teórica, para despojar una teoría de su complicación matemática hasta que emerja sólo la idea básica con claridad»²⁷, nos habla de un hombre cuyo valor principal no lo encontramos en su capacidad de cálculo o de innovación creativa, sino en su capacidad crítica para clarifi-

car las ideas que surgen en las polémicas que son parte del desarrollo de la ciencia. Y mucho de esto seguramente lo aprendió de su maestro Boltzmann.

Con ese mismo talante crítico, nos deja Ehrenfest al final de su obituario con una serie de interrogantes que llevan la intención de hacernos reflexionar sobre la manera en que se desarrollan los conceptos, las hipótesis, las estructuras teóricas de la física: «¿Cambiarán aquellos resultados de Boltzmann de su versión mecánica hacia alguna otra versión completamente diferente? ¿Causarán los avances en la termodinámica de la radiación, que en alguna presentación futura del intercambio de calor y del equilibrio térmico, se agote la preferencia del influjo de las colisiones moleculares y cambie hacia la radiación?». Ehrenfest cierra su escrito ofreciéndonos la idea de un cambio continuo, de una «transición de formas», como lo característico de los logros científicos más importantes y su relación con el «gusto artístico de sus creadores».

5. Los Ehrenfest y la mecánica estadística

Paul Ehrenfest conoció a su futura esposa Tatiana durante una estancia de estudios en Gotinga en el otoño de 1902²⁸. Ella era una estudiante de matemáticas nacida en Rusia. Para ambos sus disciplinas científicas constituían algo más que una profesión; eran el centro de su vida intelectual y trabajaban en ellas con verdadera pasión. Por eso, el apoyo mutuo que se brindaron fue muy importante para sus carreras científicas. En relación con el impacto que Tatiana tuvo sobre su esposo, el biógrafo de Paul Ehrenfest nos explica que

Paul Ehrenfest no era el tipo de pensador que desarrolla sus ideas lentamente en la soledad de su estudio. El tenía que hablar sobre ellas, trabajarlas a través de la discusión y la argumentación con algún colega crítico y competente, y Tatiana se mostró deseosa y dispuesta de jugar ese papel. La mente de ella, rápida y extraordinariamente lógica, contrastaba con la suya de carácter más inventivo, pero la urgencia vital de probar una idea hasta lo más profundo la compartían ambos. Incluso cuando no conociera los problemas físicos para los cuales se había inventado una teoría, Tatiana Ehrenfest podía en ocasiones llegar justo al meollo del asunto y plantear alguna pregunta de estructura lógica que lograba poner a su esposo en la senda correcta²⁹.

Sin embargo hay que decir que en lo que se refiere a los temas de mecánica estadística, el papel de Tatiana en realidad iba más allá de una mera interlocutora para su esposo, pues ella realizó investigación y tuvo importantes publicaciones (algunas de ellas en coautoría con Paul) sobre los fundamentos de la mecánica estadística, destacando su interés por los conceptos de entropía y el papel y el significado de conceptos como *aleatoriedad*, *posibilidad*, etcétera, aplicados a pro-

cesos físicos. En un artículo titulado *On the Use of the Notion «Probability» in Physics*³⁰, Tatiana introduce primero los términos de «orden» y «nivel». Si de una urna con dos bolas rojas y una negra, sacamos al azar sólo una de ellas, tendremos un «evento de primer orden» – la actitud normal aquí sería la de esperar que el resultado sea «bola roja» si aplicamos las «leyes de la probabilidad». Si de la urna sacamos n bolas (tomemos por ejemplo $n = 3$), pero una a la vez, viendo su color y regresándola a la urna, tendremos un «evento de segundo orden e índice n » – si $n = 3$ la actitud normal sería la de esperar que el resultado sea de dos bolas rojas y una negra, pues es la combinación más probable. Tatiana nos destaca que en un proceso físico en el que se tienen que introducir suposiciones de carácter probabilístico, la actitud del físico consiste en aceptar la «hipótesis» del evento más probable de un orden dado. Pero como se observa en el ejemplo citado, la aceptación de la hipótesis de un orden dado n , implica la renuncia a la hipótesis de orden $n - 1$ (para esperar en el evento de segundo orden que salgan dos bolas rojas y una negra, renunciamos a la idea de que en un evento de primer orden el resultado sea «bola roja»). Por eso, nos dice Tatiana, «hay un número infinito de hipótesis del más probable y todas ellas están en *contradicción entre sí*» por lo que concluye que no tiene sentido hablar de «leyes de probabilidad», sino que hay que hablar de «cálculo de probabilidades».

En un curso sobre mecánica estadística que ofrecía Paul Ehrenfest en Leiden en el año escolar 1915-1916³¹, les aconsejaba a sus alumnos: «Si es necesario, siempre traten de ilustrar usando modelos de dados o de urnas para evitar cualquier misticismo». Con esto evitarían que las suposiciones probabilísticas quedaran ocultas dentro de las ecuaciones que se derivaban a partir de los cálculos que involucraban los movimientos y colisiones de las partículas. Para Ehrenfest, el uso de modelos simples, como «caricatura» del problema real, permitía resaltar y exponer de una manera clara los aspectos más cruciales de los fenómenos estudiados, pues de esa manera, con pocos cálculos se podrían entrever las conexiones lógicas entre las suposiciones y los resultados que de otra forma quedarían escondidos en las ecuaciones. Una de sus lecciones tenía que ver con las objeciones (las de Loschmidt y Zermelo mencionadas anteriormente) que se habían levantado en contra de la interpretación que Boltzmann había dado de la segunda ley de la termodinámica. Como era su costumbre, el tema lo abordó por medio de un modelo simple de urnas que él y Tatiana habían ideado hacía algunos años y sobre el cual habían publicado dos artículos en 1906 y 1907 titulados *Sobre un problema del cálculo de probabilidades, en conexión con la interpretación cinética del incremento de entropía y Sobre dos conocidas objeciones contra el teorema H de Boltzmann*³².

El modelo de urnas de Paul y Tatiana, que se hizo muy popular, surgió de los análisis que el joven matrimonio había discutido en torno a las citadas objeciones

en un intento por clarificar las contradicciones que ahí se presentaban. De esta manera, Paul utilizaba en su propia persona aquellas virtudes que él había destacado sobre su maestro en el obituario que analizamos previamente, es decir, el arte de inventar y usar modelos conceptuales simples para clarificar un concepto.

El modelo ha sido discutido en detalle por otros autores³³, pero nosotros presentamos aquí nuestra traducción al español de la primera sección del artículo de 1906 para poder extraer algunas de las ideas que nos interesan en este espacio. Se plantea en ese artículo lo siguiente:

Se nos dan N bolas (por ejemplo 100). Las mismas son numeradas en forma consecutiva del 1 al N para poder distinguirlas individualmente. Se reparten inmediatamente en dos urnas, de tal manera que la urna A contenga P_0 (por ejemplo 90) y la urna B tenga $Q_0 = N - P_0$ (correspondientemente 10) bolas. Pero no se sabe qué bolas quedaron en A y cuáles en B. En una bolsa se encuentran N cartas de lotería numeradas del 1 al N . Cada 10 segundos se saca una carta, se anuncia su número, se regresa a la bolsa y se mezcla bien. Luego se escoge otra, se anuncia, etc. Cada vez que se anuncia un número, la bola que lleva ese número salta de la urna en la que se encuentra hacia la otra urna y permanece ahí hasta que más tarde vuelva a salir su número. Es claro que: siempre es más probable que la bola escogida se encontrará en la urna más llena y no en la más vacía. Por lo tanto, en tanto que la urna A siga estando mucho más llena que la urna B, la mayoría de los siguientes resultados del sorteo vaciarán la urna A en la urna B y sólo rara vez sacarán una bola de la urna B³⁴.

Los Ehrenfest introducen una cantidad y definida como la diferencia absoluta entre el número de bolas que se encuentran en las urnas y analizan su comportamiento. Esta cantidad, vendría siendo equivalente a la función H de Boltzmann. Aunque la «curva» que representa a y tiende hacia un valor nulo, nada impide que, si se espera un tiempo suficientemente grande, pueda crecer, incluso hasta un valor N , correspondiente al vaciado de una de las urnas. Con este modelo, desarrollado luego con más detalle en el artículo de 1907, los Ehrenfest tratan de dar respuesta a las objeciones presentadas por Loschmidt y Zermelo en el sentido de que el aumento de la entropía no es una ley absoluta, sino que es de carácter estadístico³⁵. Este último artículo se desarrolla en un estilo muy característico de Paul Ehrenfest que consiste en presentar secuencialmente los puntos que quiere mostrar, comparar o deducir lógicamente. En este caso: 1. El teorema H en su formulación usual, 2. La objeción de reversibilidad de Loschmidt, 3. La objeción de recurrencia de Zermelo, 4. El punto de vista de Boltzmann en relación con estas dos objeciones, 5. Las contradicciones, 6. Su modelo que clarificará el asunto y 7. Comentarios finales en donde concluye que «ni la objeción de reversibilidad, ni tampoco la objeción de recurrencia son de ningún modo apropiadas o suficientes para desaprobear la afirmación de Boltzmann de que el cociente diferencial temporal de H [es decir,

la derivada con respecto al tiempo] es, con enorme probabilidad, negativo para valores grandes de H). Un punto especialmente interesante que los Ehrenfest hacen notar es que en su modelo resulta claro que dado un valor grande de y (o de H), la «curva», como regla general, tiende a decrecer, y sólo de vez en cuando progresa hacia arriba, pero lo más importante, «este enunciado aplica tanto si uno recorre la curva de izquierda a derecha o de derecha a izquierda». Es decir, hay una simetría en el tiempo con lo cual se responde a la objeción de reversibilidad (dada por las ecuaciones de la mecánica), pero a la vez se constata la afirmación de Boltzmann de la tendencia de H a disminuir.

Regresando al artículo de Tatiana mencionado anteriormente (*On the Use of the Notion ...*) con referencia a su concepto de «hipótesis del evento más probable de un orden dado», menciona ella que, al aplicar la teoría de la probabilidad a la explicación de ciertas regularidades de fenómenos físicos, normalmente se asume la hipótesis de segundo orden, y presenta el caso del teorema H de Boltzmann como un ejemplo de esto, ya que, nos dice, «los cálculos de presión y temperatura de un gas se basan en suposiciones de segundo orden» y explica que

un ejemplo característico en el que se pasa de una hipótesis de segundo orden a una hipótesis de tercer orden, urgido por las circunstancias de la investigación (en este caso por la objeción de Zermelo basada en los postulados de la mecánica), la encontramos en la admisión de Boltzmann de que las colisiones entre las moléculas, siendo eventos aleatorios, no se pueden comportar exactamente de acuerdo con su hipótesis de las colisiones y que por lo tanto habrá veces en que la entropía de un sistema aislado cambiará en un sentido contrario a sus cálculos.

Esto quiere decir que entonces normalmente apostamos por el hecho de que un sistema debe asumir el estado más probable de acuerdo con una cierta elección de orden. Pero, ¿es cierto que siempre debemos esperar la realización del evento más probable? Esta pregunta nos lleva a otra paradoja cuando consideramos como sistema al universo entero y que Tatiana nos plantea, ya para finalizar su artículo, de una manera muy sugerente: Según Tatiana, tendríamos que creer que

el mundo tiende al estado más probable, y se asume que esta tendencia ha durado por mucho tiempo antes de la aparición de vida orgánica en la Tierra y que durará por mucho tiempo después de este momento. ¡Pero esto implica que todo este tiempo, el estado del mundo se ha encontrado lejos de su estado más probable! Entonces parece que tenemos que aceptar al mismo tiempo los cambios más probables del estado del mundo y un estado poco probable del mismo mundo al mismo tiempo (...) tenemos dos lados de la situación, uno de los cuales satisface la idea de lo más probable, mientras que el otro lo contradice, pero uno normalmente ignora el último e insiste en creer en las «leyes de la probabilidad».

La intención de esta sección fue mostrar la actitud de los Ehrenfest ante sus disciplinas científicas, la cual fue en todo momento crítica, atenta a las dificultades y a las paradojas que se presentaban, otorgándole un gran valor a la continua discusión de los puntos cruciales como constituyente principal de la vida y la actividad científica. Esta actitud les valió el respeto de la comunidad científica. En particular, un notable matemático de su tiempo, Felix Klein (1849-1925), los invitó a escribir una colaboración para la *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, en donde hicieran una revisión de los principios de la mecánica estadística, la cual se convirtió en una referencia obligada para físicos y matemáticos.

6. El artículo de los Ehrenfest en la *Encyklopädie*

En octubre de 1906, Ehrenfest había terminado el obituario de Boltzmann al que nos referimos en la sección 4 y también había escrito junto con su esposa el artículo titulado *Sobre una tarea del cálculo de probabilidades, en conexión con la interpretación cinética del incremento de entropía* mencionado en la sección 5, que es uno de los escritos en los que desarrollaron el famoso modelo de las urnas. Ehrenfest escogió también el tema de ese artículo para presentarlo en un Seminario de Matemáticas al que lo había invitado el connotado matemático Felix Klein, quien tenía a su cargo la edición de la *Encyklopädie*^{36,37}. Impresionado por la capacidad analítica y didáctica de Ehrenfest y por el éxito que había tenido la conferencia, Klein decidió invitarlo a escribir un artículo, junto con su esposa si así lo deseaba, sobre los principios de la mecánica estadística para la *Encyklopädie*. El artículo se le había encargado previamente a Boltzmann, pero ante su muerte, Felix Klein se había visto en la necesidad de encontrar un nuevo autor, y vio en Ehrenfest a la persona ideal, quien cumplía con dos importantes características: Ehrenfest comprendía a la perfección todas las ideas de quien fuera su maestro y director de tesis y además poseía un talento especial para presentar de manera brillante los conceptos clave, como lo había demostrado en su conferencia previa. Ehrenfest aceptó, junto con Tatiana, el reto que se les presentaba. Según les explicó Klein, en el artículo tendrían que mostrar las cuestiones fundamentales de la mecánica estadística, clarificar las interrogantes que el tema presentaba y mostrar su desarrollo. Les llevó tres años tener lista una primera versión y casi dos años más terminarla y publicarla³⁸, tiempo que además coincidió con su estancia en San Petersburgo, ciudad donde Tatiana había pasado también su infancia.

El artículo de Paul y Tatiana³⁹ considera, como los autores mismos lo expresan en el prefacio, que todos los estudios en torno a la conexión de la mecánica con la teoría de la probabilidad se han alimentado de las controversias en torno al teore-

ma H de Boltzmann. Los Ehrenfest se dan a la tarea de recoger los elementos conceptuales escondidos en esas controversias y presentar las ideas de una manera más coherente sobre todo en lo que se refiere a aclarar las ideas de Boltzmann, pero dándole mucha importancia a identificar los puntos débiles o que ellos consideran que carecen todavía de la fundamentación debida. Por eso en la estructura del artículo, una primera parte está dedicada a las primeras contribuciones a la mecánica estadística antes de dichas controversias y una segunda parte la dedica a las formulaciones estadísticas que corresponden al tratamiento más moderno del tema⁴⁰. También hay una tercera parte en la que se discuten las contribuciones de Josiah Willard Gibbs (1839-1903), a las cuales, aunque les reconoce el valor de tratar de dar una presentación más sistemática de la mecánica estadística, al mismo tiempo les critica el cubrir sólo una fracción de las ideas principales.

El artículo de la *Encyklopädie* se convirtió en una referencia fundamental sobre el tema de la mecánica estadística, por lo que ha sido analizado, elogiado y criticado por varios autores⁴¹. En esta sección nos limitaremos a los puntos centrales que tienen que ver con el cambio de concepción que, según sugieren los Ehrenfest, se da a raíz de las diversas objeciones (principalmente las de Loschmidt y Zermelo) que se levantaron en torno a los primeros trabajos de Boltzmann. Esos primeros escritos llevaron a Boltzmann a generalizar el concepto de entropía y a aplicarlo a estados fuera de equilibrio de un sistema, demostrando que una función H que él define, siempre disminuiría y llevaría a un cambio de la función de distribución de probabilidad de velocidades de las moléculas hasta que se alcanzara la distribución de Maxwell-Boltzmann, que sería la condición de equilibrio⁴². Una vez en ese estado, la función H, y por ende la entropía, se mantendrían constantes. Estos resultados dependían de una suposición respecto al número de colisiones por unidad de tiempo entre moléculas de determinada velocidad. Ehrenfest explica este proceso que llevaba a la estabilidad, por medio de un modelo simplificado, bidimensional y fácil de entender que consistía en suponer sólo cuatro posibles velocidades de las moléculas: hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha y hacia la izquierda. En este modelo, las moléculas podían cambiar de dirección por medio de colisiones con otros elementos fijos; una molécula viajando hacia la derecha, por ejemplo, podría ser redirigida hacia arriba o hacia abajo al chocar con uno de estos elementos. Ehrenfest demuestra que, con el transcurrir del tiempo, la cuarta parte de las moléculas viajaría en cada una de las direcciones permitidas, sin importar cuál era la distribución inicial de las velocidades⁴³. Sin embargo, el resultado de un cambio siempre decreciente de la función H (o un cambio siempre creciente de la entropía) era contradicho por las objeciones de Loschmidt y Zermelo. Por eso, explica Ehrenfest, las nuevas explicaciones de Boltzmann consistirían en aplicar un enfoque probabilístico. Parte de la confu-

sión se daría por la inconsistencia de Boltzmann al darle diferentes significados a la probabilidad, a veces como promedios temporales (fracción relativa de tiempo que se permanece en algún estado), a veces como promedios de las partículas, a veces como promedios de conjuntos o *ensembles*⁴⁴. Para evitar estas ambigüedades, se puede proceder a aplicar lo que los Ehrenfest llamaron la hipótesis ergódica, usada en diferentes momentos por Boltzmann, para lo cual es necesario referirse a los espacios de fase.

El estado instantáneo de un gas, su microestado, está definido por N parámetros que corresponden a la información de posición y movimiento de cada una de las moléculas (si se considera, por ejemplo, un sistema con M moléculas y se asignan p parámetros de posición y q parámetros de movimiento para cada molécula, entonces $N = M[p+q]$ ⁴⁵). Dicho microestado se puede representar geoméricamente como un punto en un espacio N -dimensional (el espacio de fase). A ese punto le llamamos *punto de fase*, el cual, al evolucionar el sistema (las moléculas van cambiando de posición y de velocidad) se desplazará definiendo una trayectoria en el espacio de fase de N dimensiones. Si es un sistema cerrado, el sistema estará restringido a mantener siempre una misma energía total E y por lo tanto el punto de fase se podrá mover sólo sobre la *superficie* (de $N - 1$ dimensiones) de energía constante. La hipótesis ergódica, usada por Boltzmann y clarificada por Ehrenfest, considera que un sistema cerrado recorre, en su proceso de evolución, todos los estados compatibles con su energía (el punto de fase pasa por todos los puntos de la «superficie» de energía) y dicha hipótesis es usado como base para afirmar la equiprobabilidad de los estados. Boltzmann, y también Maxwell, se sintieron justificados a asumir la hipótesis ergódica, según nos explica Ehrenfest, apoyándose en «la complejidad de las colisiones de las moléculas entre sí y de las moléculas con las paredes rugosas, pero perfectamente elásticas del contenedor»⁴⁶. Sin embargo para Ehrenfest dicha hipótesis es dudosa⁴⁷ y prefiere introducir una condición menos restrictiva a la cual llama hipótesis *cuasi-ergódica* que considera que el punto de fase no pasa por todos los puntos de la *superficie* de energía, pero sí que la cubre densamente («approach arbitrarily closely each point of the energy surface»)^{48,49}.

Para explicar la manera en que Boltzmann reinterpreta el teorema H, con lo cual se puede dar respuesta a las objeciones que habían surgido, Ehrenfest tiene que introducir otros conceptos. Además del espacio de fase del sistema mencionado anteriormente, y al que Ehrenfest le llama espacio Γ , introduce también el espacio de fase molecular μ . Este último se define, no para todo el sistema, sino para cada molécula por separado, y es un espacio con tantas dimensiones como parámetros de posición y de movimiento se definan. Un punto de ese espacio representa el estado instantáneo de una molécula. Por lo tanto el estado instantá-

neo de un gas compuesto por N moléculas quedará definido por N puntos en el espacio μ . Ehrenfest sugiere dividir el espacio μ en pequeños paralelepípedos ω , cuyos lados representarían pequeños intervalos de cada uno de los parámetros de posición y movimiento mencionados. Cada una de esas pequeñas celdas w_i contendría, en un instante dado de tiempo, un cierto número a_i de puntos del total N . Ehrenfest llama «distribución \mathbf{Z} » al conjunto de números a_i . A una distribución dada \mathbf{Z} le corresponde una región continua de la superficie de energía constante en G (hay un número infinito de puntos en G que corresponden a la misma distribución \mathbf{Z}). La función H , desde este punto de vista, sería $H = \sum a_i \log a_i$.

La nueva descripción estadística estudiaría el comportamiento promedio de un número infinito de copias idénticas del sistema, cada una con un estado instantáneo inicial distinto, pero correspondientes a la misma distribución \mathbf{Z} . Esta «ficción», como la llama Ehrenfest, permite reemplazar ciertas «suposiciones probabilísticas» por enunciados estadísticos. Así, no tendríamos una curva H , sino todo un conjunto de ellas. Estas curvas tomadas individualmente tendrían un comportamiento que no contradice el carácter simétrico en el tiempo de los sistemas mecánicos que Loschmidt y Zermelo habían considerado. Estas curvas H cumplen con las siguientes características: 1. Casi siempre decrecen cuando parten de un punto H_1 que se encuentra arriba del mínimo H_0 , 2. Lo anterior es cierto ya sea que uno se mueva de izquierda a derecha (secuencia positiva del tiempo) o de derecha a izquierda (secuencia invertida del tiempo) y 3. Normalmente la curva H se mantiene cerca del mínimo H_0 ⁵⁰. Esta curva, en la que sí puede crecer H , aunque no sea lo más probable, es a la que Boltzmann hace referencia al responder a sus críticos, pero no es la misma que él había derivado previamente. Boltzmann nunca estableció esto claramente, siendo causa de mucha confusión. Ehrenfest trata de enmendar la situación explicando que la curva H derivada previamente por Boltzmann, y a la cual Ehrenfest llama «la curva del Teorema H » para evitar la confusión, equivaldría en realidad a la «curva de concentración» del conjunto de curvas H del conjunto o *ensemble* ficticio de sistemas idénticos, un promedio de todas ellas que, ahora sí, efectivamente, decrece monotónicamente hacia el valor mínimo H_0 , y cuando lo alcanza, ya no se mueve de ahí⁵¹. De esta manera, Ehrenfest muestra que, contrario a lo que muchos creían, no hay contradicción en las afirmaciones de Boltzmann, pero advierte que dichas afirmaciones aún no han sido demostradas. Por último, Ehrenfest también nos hace notar «cuántos enunciados puramente intuitivos se esconden detrás de la terminología probabilística normalmente usada (por Boltzmann)»⁵².

Sin duda Felix Klein hizo una buena elección al pedir a los Ehrenfest la redacción de este artículo. La intención del mismo, al formar parte de la *Encyklopädie*, encajaba de manera perfecta con los intereses teóricos y de profundidad conceptual

que más interesaban a los Ehrenfest. Sin embargo, en las conclusiones del artículo, dejan ver la importancia de las últimas aplicaciones (el estudio del movimiento de los electrones en los metales, las investigaciones sobre soluciones coloidales) y cómo ellas eran las responsables del renovado interés por las ideas de Boltzmann y por su fe en el uso de imágenes mecánicas y atomísticas, pues dichas aplicaciones «han tenido el efecto de revivir y profundizar el concepto de que todos los cuerpos se pueden visualizar como agregados de un número finito de componentes elementales idénticos y muy pequeños»⁵³. Sin embargo, reconocen que la situación es más complicada en las aplicaciones a los fenómenos de radiación, donde

el teorema de equipartición de energía extendido al equilibrio térmico entre la materia y el éter estaba bien confirmado en lo que se refiere a la parte infrarroja de la radiación del cuerpo negro (...) sin embargo, su extensión al dominio ultravioleta, lleva a resultados absurdos, de tal manera que (...) hasta el momento nadie sabe cómo se pueden resolver estas dificultades⁵⁴.

El mismo año de 1911, Ehrenfest bautizaría esos resultados absurdos como la *catástrofe ultravioleta* y significarían el camino hacia la física cuántica⁵⁵.

7. Conclusiones

La búsqueda racional del conocimiento encontró en las matemáticas la herramienta ideal para la representación de la realidad física. Pero en el proceso de construcción de las teorías esto tuvo significados diferentes para los científicos. Para un fenomenista, por ejemplo, el físico tendría que construir sus teorías traduciendo al lenguaje matemático sólo lo que directamente percibimos con nuestros sentidos o con nuestros instrumentos de medición. Pero para físicos como Boltzmann, a quien con mayor certeza podemos señalar como el fundador de la mecánica estadística, la construcción de una teoría es mucho más que eso, pues para hacer ciencia, el científico tiene que ir más allá de la experiencia, apostar a nuevas formas de imaginar la realidad, para luego contrastarlas con la experiencia y la justificación lógica. La interpretación de la realidad como un conglomerado de partículas invisibles interactuando entre sí requirió, además, el uso de recursos probabilísticos que despertaron nuevas sospechas, pues ¿cómo deben entenderse esas probabilidades?, ¿cómo deben utilizarse para que aporten explicaciones sobre los fenómenos observados?, y sobre todo ¿qué papel pueden jugar las probabilidades dentro de un esquema mecanicista que opera bajo los supuestos de un determinismo estricto? Estas y otras preguntas de carácter epistemológico tuvieron que ser abordadas en la construcción de la mecánica estadística.

Los Ehrenfest percibieron la importancia que el desarrollo de la mecánica estadística tenía dentro de su disciplina más amplia de la física teórica, se ocuparon de

las paradojas que surgían, clarificaron conceptos y dejaron una huella importante que pensadores posteriores recogerían. Siendo su carácter crítico lo que los distinguía, más que dar respuestas, identificaron algunas de las preguntas clave que tendrían que ser abordadas para poder avanzar con fundamento, preguntas sobre la relación de las probabilidades con la descripción física, sobre la fundamentación de la hipótesis ergódica, sobre la posibilidad de describir procesos irreversibles asumiendo la existencia de fenómenos físicos reversibles en principio, etc.

NOTAS

1. Véase por ejemplo GLAZER & WARK [2001].
2. En este sentido, habría que distinguir entre la mecánica estadística clásica y la mecánica estadística cuántica. En este trabajo nos referimos principalmente a la primera, asumiendo que los constituyentes individuales referidos obedecen las leyes de la mecánica clásica, y sólo se hará una breve referencia a la segunda hacia el final del escrito, tomando en cuenta que el desarrollo de la mecánica estadística clásica representa el antecedente inmediato de las ideas cuánticas, sobre las cuales Paul Ehrenfest —de quien estaremos hablando en este artículo— también tuvo cosas importantes que decir.
3. Véase BOLTZMANN [1986, p. 225].
4. Véase, por ejemplo, MANDELBAUM [1980, pp. 6-8]. Este autor hace además una distinción en el sentido de hablar de las formas sistemática (Comte, Spencer) y crítica (Mach) del positivismo.
5. Véase BOLTZMANN [1986, p. 212].
6. Carta de Ehrenfest a Einstein, 6 de agosto de 1920, citada en KLEIN [1985, p. 319].
7. Carta de Ehrenfest a Einstein, 16 de agosto de 1920, citada en KLEIN [1985, p. 319].
8. Para una edición es español véase CARNOT [1987].
9. Se pueden citar además como antecedentes a la obra de Carnot, los siguientes tres elementos: 1. Las investigaciones de científicos como Boyle, Mariotte y Gay-Lussac, cuyo trabajo experimental llevó a establecer las relaciones entre presión, volumen y temperatura de un gas; 2. las discusiones en torno a la teoría del *calórico*, que consideraba al calor como una sustancia y a la teoría dinámica que consideraba al calor como una forma de energía mecánica; y 3. la necesidad de entender y perfeccionar la máquina de vapor. Para mayor detalle ver PURRINGTON [1997, pp. 76-81].
10. En la obra de Sadi Carnot se establece de manera clara que cuando se hace trabajo en un sistema termodinámico en un proceso cíclico, el calor debe fluir del receptáculo más caliente al más frío, es decir, que se requiere una diferencia de temperatura para hacer trabajo.
11. De hecho se cree que Maxwell fue influenciado por un escrito de Sir John Herschel en el que se deriva la ley exponencial de los errores (la misma a la que llega Maxwell para la distribución de las velocidades) basado en el hecho de que la función busca debe cumplir la propiedad de que el producto de dos funciones del tipo buscado,

- aplicadas a dos variables independientes, debe ser igual a la misma función aplicada a la suma de las variables, es decir $f(x)f(y) = f(x+y)$. Para Maxwell las variables independientes son las componentes ortogonales de las velocidades de las moléculas que colisionan. Para mayor detalle ver BRUSH [1994, pp. 183-189].
12. Esa ecuación integrodiferencial lo condujo al famoso *teorema H*, donde se define la función *H* (llamada *E* por Boltzmann) donde $H = \int f \log f$, siendo *f* la función de distribución de velocidades. Boltzmann demuestra que *H* siempre disminuye a menos que *f* sea la distribución de Maxwell. Si identificamos a $-H$ como la entropía, resulta claro que dicha entropía irá en aumento hasta que el conjunto de moléculas de gas adquiere la distribución de velocidades de Maxwell. Por cierto, hay que señalar que esa letra *H* no es la *hache* del alfabeto latino, sino la letra griega *eta* mayúscula, como inicial de *entropía*.
 13. Véase HOLTON [1998, pp. 163-178].
 14. Holton habla de estos científicos como verdaderos «portadores y pilares de cultura» (Kulturträger), con el deber y la necesidad psicológica de mostrar una imagen del mundo coherente.
 15. EINSTEIN [1970, pp. 683-684].
 16. Carta de Einstein a Besso, del 6 de enero de 1948 en EINSTEIN [1994, pp. 353-354].
 17. Véase BRUSH [1994, p. 286].
 18. Véase GUTTMANN [1999, p. 1].
 19. Ibid, pp. 8, 9.
 20. Varios autores han analizado el trabajo de Boltzmann. Véase por ejemplo BRUSH [1994, pp. 231-248] o KLEIN [1973], u Ordóñez en su introducción a BOLTZMANN [1986].
 21. Las citas de Ehrenfest usadas en esta sección corresponden al obituario mencionado. El título de la publicación original es «Ludwig Boltzmann» y fue publicado en *Mathematisch Naturwissenschaftliche Blätter* y se puede encontrar en EHRENFEST [1959, pp. 131-135], que es la colección de trabajos científicos de Ehrenfest editada por Martin Klein. La traducción al español es nuestra y proviene directamente del original en alemán.
 22. Véase KLEIN [1985, p. 79]. Esta admiración que Ehrenfest sentía por Boltzmann y por otros grandes físicos de su tiempo, nos explica Klein, contrasta con el sentimiento de no poseer él mismo una clara línea de trabajo productivo.
 23. Véase nota 12.
 24. Véase KLEIN [1973, p. 73].
 25. Nos basamos aquí en parte en las consideraciones de UFFINK [2004].
 26. Véase también REICHENBACH [1988, pp. 82-84].
 27. Véase el apartado «Paul Ehrenfest in Memoriam» en EINSTEIN [1950, p. 215].
 28. Sobre este período en la vida de Paul Ehrenfest y el impacto de Tatiana en el trabajo científico de su esposo, véase el capítulo 5 de KLEIN [1985].
 29. Ibid, p. 51.
 30. Véase EHRENFEST, T. [1958]. Aunque el artículo referido es de 1958, el tema lo había tratado Tatiana desde 1911, lo había publicado en Rusia y había sido tema de discusión con su esposo Paul, quien lo usó como tópico de varias conferencias según ella misma lo explica en el *abstract* de este artículo.

31. La descripción que aquí se ofrece se puede consultar con mayor detalle en KLEIN [1989, pp. 32-35].
32. Los títulos originales de los artículos son, «Über eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die mit der kinetischen Deutung der Entropievermehrung zusammenhängt» presentado en la *Mathematisch Naturwissenschaftliche Blätter*, volumen 3 y «Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem» presentado en el *Physikalische Zeitschrift*, volumen 8. Ambos se encuentran en EHRENFEST [1959, pp. 128-130 y 146-149], que es la colección de trabajos científicos de Ehrenfest editada por Martin Klein.
33. Ver por ejemplo KLEIN [1985, 116-119] y KAC [1959].
34. El modelo ilustraría de una manera bastante directa el caso, por ejemplo, de un gas confinado en un receptáculo con un volumen dado dividido en dos por una barrera con una abertura. Si partimos de una condición inicial en la que la densidad de las dos mitades es diferente, las moléculas podrían pasar a través de la abertura de un lado a otro tendiendo a igualar la densidad. El modelo llegó a ser llamado también «modelo de los perros y las pulgas», al sustituir las urnas por dos perros y las bolas por pulgas que saltan de un perro al otro.
35. En este artículo es en el que los Ehrenfest bautizan a estas objeciones con los nombres de reversibilidad (Umkehrinwand) y recurrencia (Wiederkehrinwand).
36. El proyecto de la *Encyklopädie* había sido concebido varios años antes y sus líderes eran Felix Klein, Franz Meyer y Heinrich Weber. Su objetivo era presentar los logros, los métodos y las aplicaciones principales de las ciencias matemáticas del siglo XIX para ofrecer así una imagen del lugar que tenían las matemáticas en la cultura de esa época. Los artículos propiamente dichos eran escritos, previa invitación, por reconocidos matemáticos y científicos de diversos países.
37. Este breve recuento histórico sobre la *Encyklopädie* y la participación de los Ehrenfest en la misma, se basa en KLEIN [1985, pp. 81-83].
38. Apareció originalmente bajo el título «Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik» en la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. IV, Parte 2, Artículo IV 32 (Leipzig: Teubner, 1911). Se puede consultar también en su versión alemana en EHRENFEST [1959, pp. 213-300]. Aquí estaremos haciendo referencia a la traducción al inglés hecha por M.J. Moravcsik: EHRENFEST, P. & T. [1959].
39. Aunque el trabajo está firmado por los dos, la misma Tatiana le da un mayor crédito a su esposo en el prefacio de la versión traducida diciendo: «La labor de reunir la literatura y de organizar el artículo de la *Encyklopädie* fue realizada por Paul Ehrenfest. Mi contribución consistió sólo en discutir con él todos los problemas involucrados, y creo que logré clarificar conceptos, que eran, con frecuencia, usados incorrectamente» EHRENFEST, P. & T. [1959, p. viii].
40. La distinción la hacen refiriéndose por un lado a la «vieja formulación» de las investigaciones en torno a la mecánica estadística, asociada principalmente con la prueba original de Boltzmann de su teorema H (1872), y por otro lado a la «formulación moderna», asociada principalmente con el cambio de concepción hacia una interpretación probabilística del citado teorema.

41. Ver por ejemplo: KLEIN [1985, pp. 119-140], quien hace un análisis muy completo del artículo; GUTTMANN [1999, pp. 70-73], que es una referencia muy actual sobre los fundamentos probabilísticos de la mecánica estadística y que considera el artículo de los Ehrenfest como una de las contribuciones de mayor influencia en la literatura sobre el tema; SKLAR [1993, pp. 67-71], quien hace un resumen de la crítica de Ehrenfest a Gibbs; BRUSH [1994, pp. 363-377] lo considera sobre todo una contribución importante al desarrollo de la teoría ergódica en mecánica estadística. Esta última referencia critica al artículo de la *Encyklopädie* por dejar mucho que desear como presentación histórica del trabajo de Maxwell y Boltzmann, pero reconoce que muchos de los aparentes errores históricos que presenta el artículo no son tales si uno toma cuidadosa cuenta de las extensas notas a pie de página.
42. Véase nota 12.
43. Véase el apéndice a la sección 5 del artículo, EHRENFEST, P. & T. [1959, pp. 10-13].
44. Se aplica la palabra *ensemble* o *statistical ensemble* a una idealización que consiste en un número grande (puede ser infinito) de copias imaginarias de un sistema, cada una de las cuales representa uno de los posibles estados en que puede estar el sistema real. El concepto de *ensemble* es fundamental para la mecánica estadística, y fue desarrollado sobre todo por Gibbs y por Einstein (el cual, no hay que olvidarlo, fue también uno de los primeros contribuyentes a la mecánica estadística).
45. Obviamente, el espacio de fases para un sistema de M partículas puntuales tiene dimensión $(3+3)M=6M$, pues cada partícula tiene un vector posición r y un vector velocidad v , ambos en tres dimensiones. Sin embargo, estamos considerando aquí un caso más general que dependería del número de grados de libertad que se esté considerando y por eso hablamos de p parámetros de posición y q parámetros de movimiento.
46. Véase nota 97, *Ibid*, p. 90.
47. De hecho, poco después, en 1913, Plancherel y Rosenthal demostraron la imposibilidad de la hipótesis ergódica al mostrar que una trayectoria unidimensional no puede llenar un espacio de mayor dimensionalidad. Véase GUTTMANN [1999, p. 73].
48. Véase nota 98, EHRENFEST, P. & T. [1959, p. 90].
49. Para una consideración más actual del status de la hipótesis ergódica, ver por ejemplo LOMBARDI [2003].
50. EHRENFEST, P. & T. [1959, p. 33].
51. *Ibid*, pp. 34, 35.
52. Véase nota 140, *Ibid*, p. 94.
53. *Ibid*, p. 68.
54. *Ibid*, p. 69.
55. Como ya se apuntaba al principio de este artículo (véase la nota 2), no es intención de este trabajo profundizar en los desarrollos subsiguientes de la mecánica estadística. Es por ello que no se han tratado en mayor detalle temas muy importantes como la ley de radiación del cuerpo negro, donde Planck introdujo por primera vez el cuanto, ayudando así a evitar, sin saberlo, la *catástrofe del ultravioleta*. Tanto Ehrenfest como Einstein se dieron cuenta de los problemas que tenía la teoría de la radiación en su tiempo y, mediante el análisis de la hipótesis cuántica de Planck, ayudaron a que la física entrara a principios del siglo XX en una nueva etapa.

BIBLIOGRAFÍA

- BOLTZMANN, L. (1986) *Escritos de mecánica y termodinámica*. Madrid, Alianza Editorial. Traducción, introducción y notas de Javier Ordóñez.
- BRUSH, S. (1994) *The kind of motion we call heat*. Amsterdam, North Holland Personal Library.
- CARNOT, S. (1987) *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego y sobre las máquinas adecuadas para desarrollar esta potencia*. Madrid, Alianza Editorial. Traducción, introducción y notas de Javier Ordóñez.
- EHRENFEST, P. (1959) *Collected Scientific Papers*. M.J. Klein, editor. Amsterdam, North-Holland Publishing Company.
- EHRENFEST, P. & T. (1959) *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics*. New York, Dover Publications, Inc. Translated by Michael J. Moravcsik.
- EHRENFEST, T. (1958) «On the use of the Notion «Probability» in Physics». *American Journal of Physics*, 26(6), 388-392. Obtenido el 2 de marzo del 2006 de la base de datos en línea publicada por la American Association of Physics Teachers.
<http://scitation.aip.org/getpdf/servlet/GetPDFServlet?filetype=pdf&id=AJPAS000026000006000388000001&idtype=cvips&ident=freesearch&prog=search>
- EINSTEIN, A. (1950) *Out of my Later Years*. New York, Philosophical Library.
- EINSTEIN, A. (1970) «Remarks to the Essays Appearing in this Collective Volume». En: P. A. Schilpp (ed.) *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*. New York, Library of Living Philosophers, MJF Books, 663-688.
- EINSTEIN, A. (1994) *Correspondencia con Michele Besso: 1903-1955 / Albert Einstein*. Barcelona, Tusquets Editores. Edición, prólogo y notas de Pierre Speziali. Traducción de Manuel Puigcerver.
- GLAZER, A.M. & WARK, J.S. (2001) *Statistical Mechanics: A survival guide*. Oxford University Press.
- GUTTMANN, Y.M. (1999) *The Concept of Probability in Statistical Physics*. Cambridge University Press.
- HOLTON, G. (1998) *The advancement of science, and its burdens*. Harvard University Press.
- KAC, M. (1959) *Probability and Related Topics in the Physical Sciences*. New York, Interscience Pub.
- KLEIN, M.J. (1973) «The Development of Boltzmann's Statistical Ideas». En: E.G.D. Cohen & W. Thirring (eds.) *The Boltzmann Equation*. Wien: Springer, 53-106.
- KLEIN, M.J. (1985) *Paul Ehrenfest: The making of a theoretical physicist*. Amsterdam, North-Holland Physics Publishing.

- KLEIN, M.J. (1989) «Physics in the Making in Leyden: Paul Ehrenfest as Teacher». En: A. Sarlemijn y M.J. Sparnaay (eds.) *Physics in the Making: Essays on Developments in 20th Century Physics*. Ámsterdam, North-Holland, 29-44.
- LOMBARDI, O. (2003) «El problema de la ergodicidad en la mecánica estadística». *CRITICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 35(103), 3-41.
- MANDELBAUM, M. (1980) «Philosophic Movements in the Nineteenth Century». En: C. Chant y J. Fauvel (eds.) *Darwin to Einstein: Historical Studies on Science and Belief*. New York, Longman Inc., 2-44.
- PURRINGTON, R.D. (1997) *Physics in the Nineteenth Century*. London, Rotgers University Press.
- REICHENBACH, H. (1988) *El sentido del tiempo*. 2ª edición en español, México, Plaza y Valdés. Traducido de la edición en inglés, 1956.
- SKLAR, L. (1993) *Physics and Chance: Philosophical Issues in the Foundations of Statistical Mechanics*. Cambdrige University Press.
- UFFINK, J. (2004) «Boltzmann's Work in Statistical Physics». En: E.N. Zalta (ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2004 Edition)*, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2004/entries/statphys-Boltzmann/>.